Дәріс 7. Михайлов критерийі. Найквист критерийі.

PhD, Калиева Н.Б.

Орнықтылық критерийлері 2-ге бөлінеді. **Алгебралық** (Раусс, Гурвиц, Вышнеградский және т.б.) және **жиіліктік** (Михайлов, Найквист және т.б.).

Михайлов критерийі

Жүйенің орнықтылығы беріліс функциясының сипаттаушы полиномы арқылы анықталады:

$$D\,(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n\text{-}1} + \ldots + a_{\mathrm{n-1}} p + a_n\,,$$

мұндағы, n – полином дәрежесі.

$p = j\omega$, онда

$$D\,(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n\text{-}1} + \ldots + a_{n\text{-}1}(j\omega) + a_n,$$

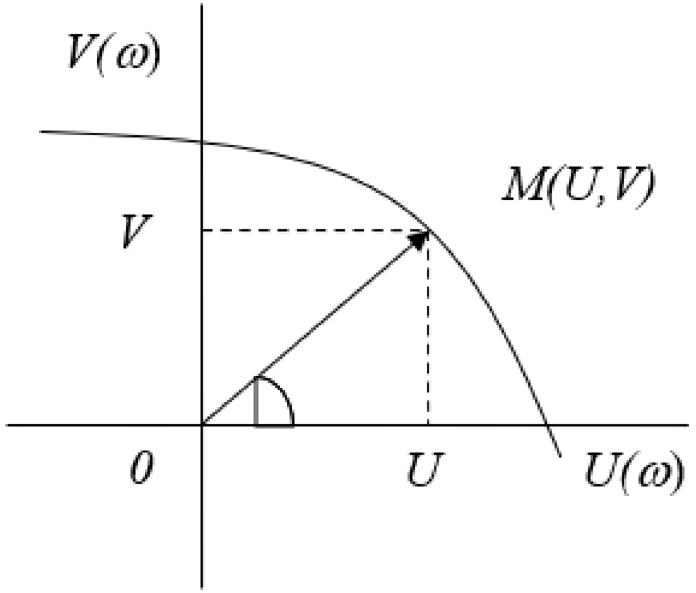
$(j\omega)^n$ дәржесіне байланысты ол не накты, не жорамал болады. Сол себепті комплексті-жиілікті теңдеу накты $U(\omega)$ және жорамал $V(\omega)$ бөлікке бөлінеді:

$$D(j\omega) = U(\omega) + j\,V(\omega)\,,$$

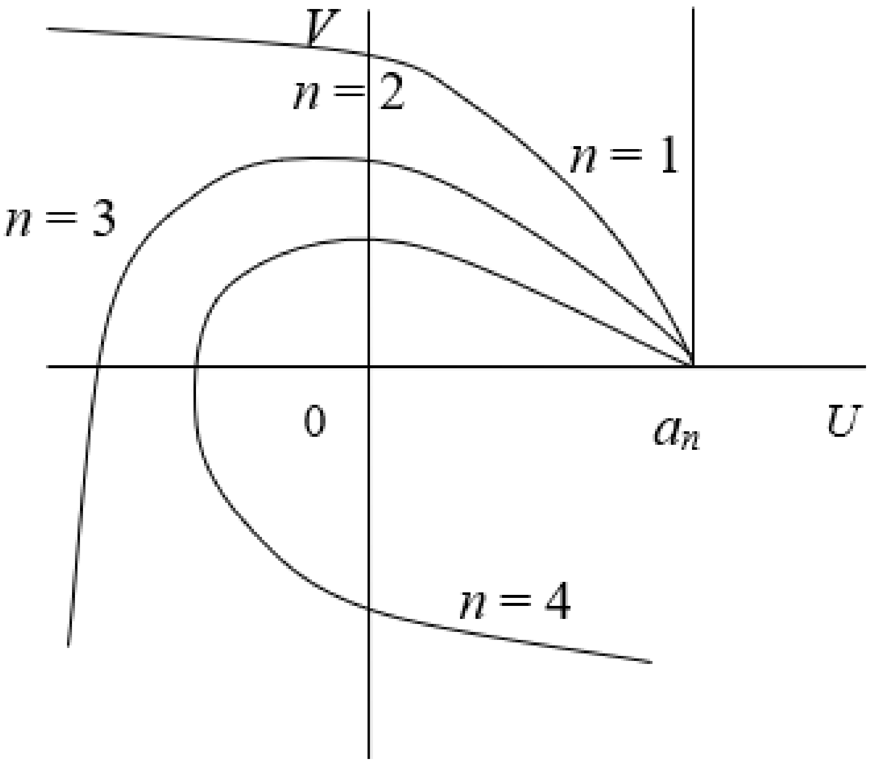
$$U(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \ldots,$$

$$V(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \ldots,$$

ω жиілігіне қандай да бір мән беру арқылы, $U(\omega)$ және $V(\omega)$ –ны анықтаймыз. Геометриялық тұрғыдан қарастырақ, оларды комплекстік жазықтықта М(U,V) нүктесі арқылы бейнелеуге болады.

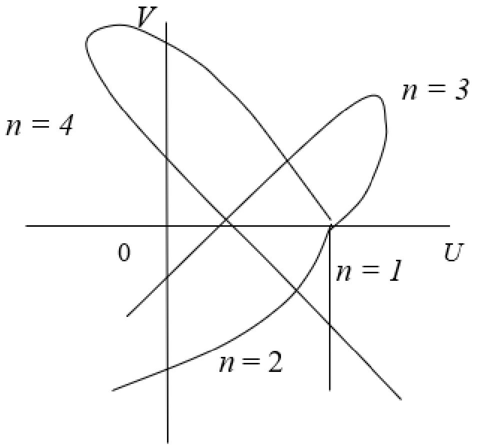


Әр түрлі жиіліктегі М(U,V) нүктелер жиыны қандай да бір қисықты түзейді. Ол қисық **Михайлов годографы** деп аталады.

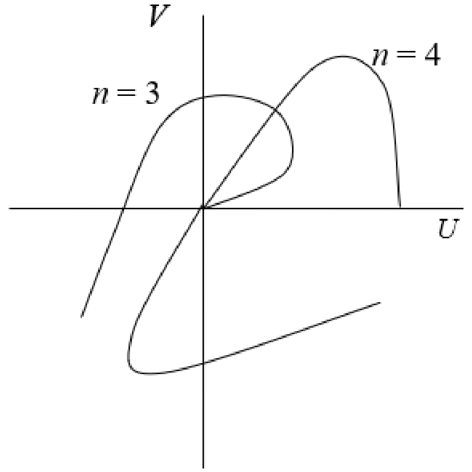


Бірінші анықтама. Жиілікті нөлден бастап шексіздікке дейін өзгерткен кезде, Михайлов годографы нақты осьте орналасқан a_n нүктесінен басталып, сағат тіліне қарсы, нөлден өтпей, n – ширекте шексіздікке кетіп бара жатса, - жүйе ***орнықты***. *Яғни* годограф координата басын «орауға» тырысады.

Екінші анықтама. Жиілікті нөлден бастап шексіздікке дейін өзгерткен кезде, координат осьтерін қиятын годографтың жиіліктері $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 <\ldots \omega_n$ өспелі тізбекті құраса, онда жүйе – ***орнықты***. *Я*ғни бұл жағдайда график салмай-ақ жүйенің орнықтылығын анықтауға болады.



Жүйе ***орнықсыз*** болған жағдайда, қисықтар (Михайлов годографы) координата басын орамайды, жұп және тақ полином жиіліктерінің кезектесуі орын алмайды



Үшінші анықтама.

Егер жиілікті нөлден шексіздікке дейін өзгерткенде, комплексті жиілікті полином векторы $D(j\omega)$ кезекпен сағат тіліне қарсы $\pi/2$ бұрышына айналып, еш жерде 0 болмаса, онда жүйе ***орнықты***.

Егерде годограф координата басынан басталса немесе координата басынан өтсе, онда жүйе ***орнықтылық шекарасында*** орналасқан болып табылады

Найквист критерийі

Тұйық жүйенің орнықтылығы, тұйық емес жүйенің комплексті-жиілікті сипаттама годографы арқылы анықталады.

Тұйық емес жүйенің беріліс функциясы:

$$W(p) = \frac{B(p)}{D(p)}.$$

Сипаттаушы теңдеу: $D(p)$=0.

Егер жүйе тұйық болса, оның беріліс функциясы:

$$\bar{W}(p) = \frac{B(p)}{D(p) + B(p)}$$

Сипаттаушы теңдеу: $D(p) + B(p)$=0

$$\frac{W(p)}{\bar{W}(p)} = \frac{D(p) + B(p)}{B(p)}$$

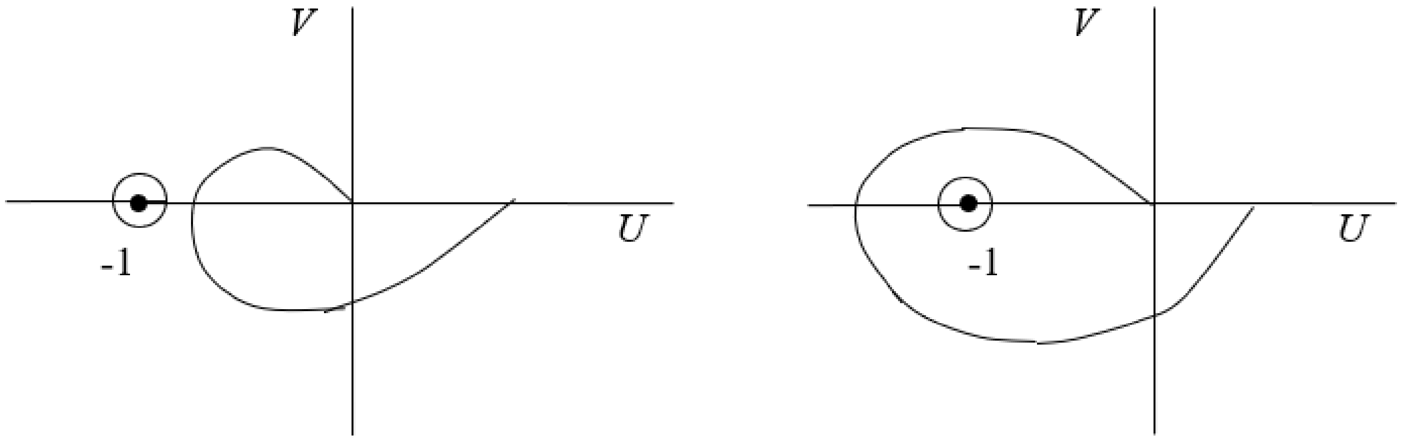
$$\frac{D(p) + B(p)}{B(p)} = 1 + W(p)$$

$p = j\omega$ болса, $1 + W(j\omega)$

$W(j\omega)$ тұйық емес жүйенің комплексті-жиілікті сипаттамасы.
Оның комплексті жазықтықта, жиілікке әр түрлі мән бере отырып, годографын тұрғызуға болады. Годографты бақылай отырып жүйенің орнықтылығы туралы сөз қозғауға болады.

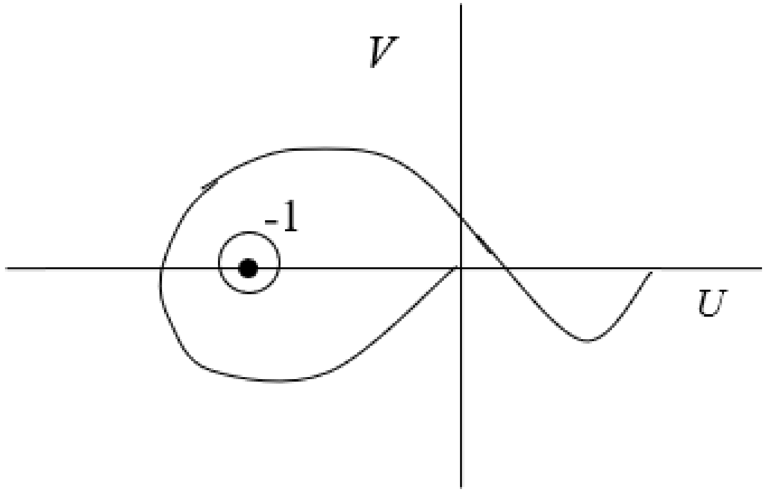
Тұйық емес жүйе орнықты болсын. Олай болса, егер орнықты тұйық емес жүйенің годографы абциссадағы -1 нүктесін орамаса, онда тұйық жүйе орнықты болады. Ал ораса – тұйық жүйе орнықсыз.

Тұйық емес жүйе орнықты

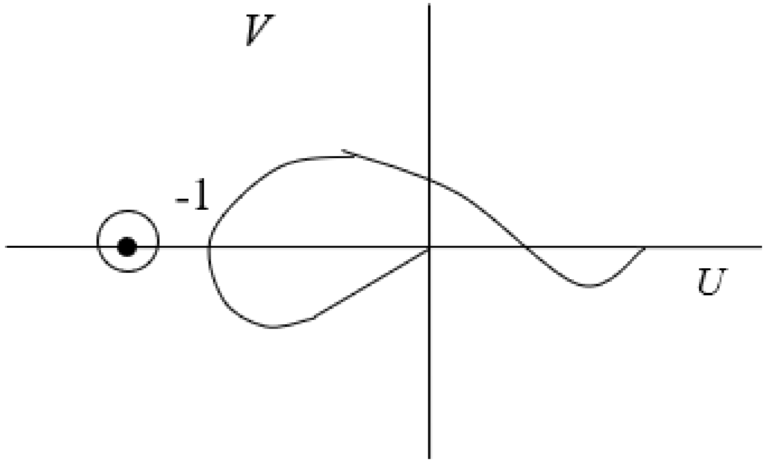


Тұйық жүйе орнықты　　　　Тұйық жүйе орнықсыз

Тұйық емес жүйе орнықсыз



Тұйық жүйе орнықты

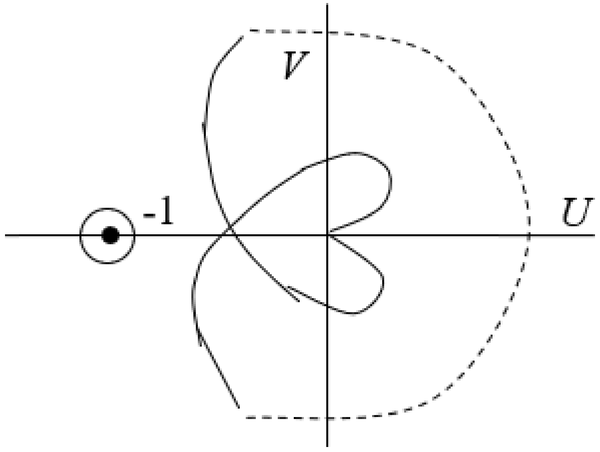


Тұйық жүйе орнықсыз

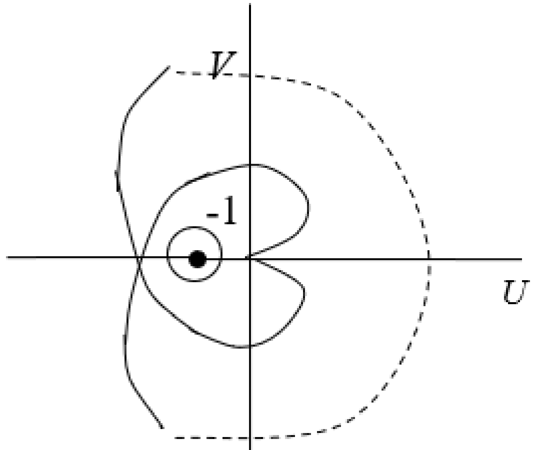
Егер тұйық емес жүйенің беріліс функциясының бөлімінде p көбейткіші болса,

$$W(p) = \frac{B(p)}{pD(p)},$$

онда комплексті-жиілікті сипаттамада $\omega = 0$ анықталмағандығы туады. Яғни амплитуда шексіздікке ұмтылады және годограф шексіз қисық болып кетеді. Ондай жағдайда годографты ойша жалғастырып, -1 нүктесі годограф қисығының сыртында жатса, жүйе орнықты екенін немесе -1 нүктесі годограф қисығының ішінде жатса, жүйенің орнықсыз екенін көруге болады.



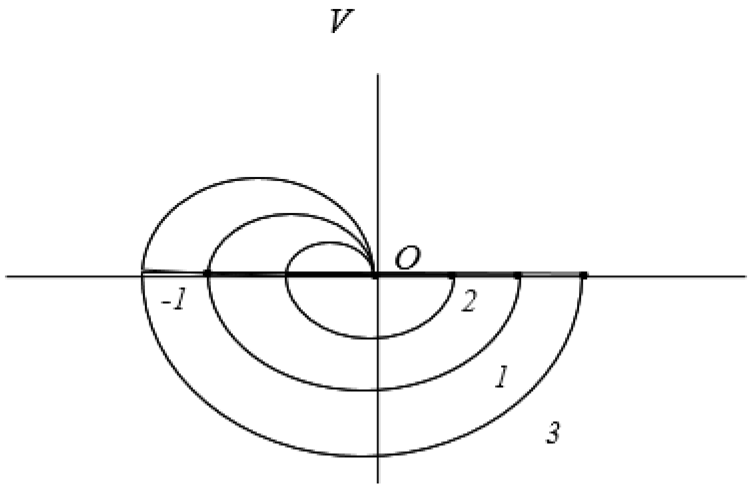
Тұйық жүйе орнықты



Тұйық жүйе орнықсыз

Тұйық емес жүйенің годографы абциссаның -1 нүктесінен өтетін болса, онда тұйық жүйе орнықтылық шекарасында болады:

$$1 + W(j\omega) = 0$$



2 – орнықты;
3 – орнықсыз;
1 – орнықтылық шекарасында.

Күшейту коэффициентін табу үшін комплексті-жиілікті сипаттаманы (КЖС) минус бірге теңестіру арқылы табуға болады:

$$W(j\omega) = -1.$$

1−мысал

Тұйық емес жүйенің беріліс функциясы белгілі болсын:

$$W(p) = \frac{k}{p^3+3p^2+4p+1}\ .$$

Егер k = 2 болса, жүйені орнықтылыққа Найквист критерийі бойынша зерттеңіз.

Комплексті-жиілікті сипаттаманы тапсақ:

$$W(j\omega) = \frac{2}{-j\omega^3-3\omega^2+j4\omega+1} = \frac{2(1-3\omega^2)-j2(4\omega-\omega^3)}{(1-3\omega^2)^2+(4\omega-\omega^3)^2}\ .$$

Нақты және жорамал жиілікті полиномдарды жазайық:

$$U(\omega) = \frac{2(1-3\omega^2)}{(1-3\omega^2)^2+(4\omega-\omega^3)^2}\ ,\ \ V(\omega) = -\frac{2(4\omega-\omega^3)}{(1-3\omega^2)^2+(4\omega-\omega^3)^2}$$

ω жиілікті 0-ден ∞-ке дейін өзгертіп, тұйық емес жүйенің годографын тұрғызайық:

$V(\omega) = 0,\qquad 4\omega - \omega^3 = 0,\qquad \omega_1 = 0, \omega_2 = 2,$

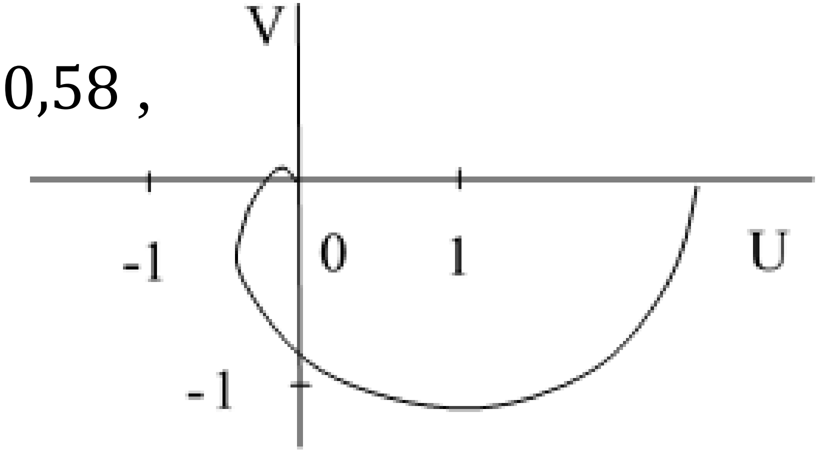
$U(0) = 2.\qquad U(2) = -0{,}18.$

$U(\omega) = 0,\qquad 1\text{-}3\omega^2 = 0,\qquad \omega_3 = 1/\sqrt{3} = 0{,}58$,

$V(0{,}58) = -3{,}7$.

$\omega = 1$ кезде алатынымыз $U(1) = -0{,}3$, $V(1) = -0{,}46$.

Ал $\omega = \infty$ $U(\infty) = 0, V(\infty) = 0$.



Тұйық емес жүйе орнықты, годограф (-1,0) нүктесін қоршамайды, демек, тұйық жүйе де орнықты.

Ұсынылатын әдебиеттер:

1. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832 с.
2. Қыдырбекұлы А.Б. Автоматика негіздері : оқу құралы / Қыдырбекұлы А.Б., Ибраев Ғ.Е.. — Алматы: Казахский национальный университет им. аль-Фараби, 2014. — 114 с.
3. В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. Теория систем автоматического управления. – С.-Пб.: Профессия, 2004. – 752 с.
4. Лукас В.А. Теория автоматического управления: Учебник для вузов. – Екатеринбург: Из-во УГГГА, 2002. – 675 с.
5. Kluever C. A. Dynamic systems: modeling, simulation, and control. – John Wiley & Sons, 2020.